

Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 07, No. 1 (2018), hal 47 – 54.

ANALISIS KESTABILAN MODEL DINAMIKA POPULASI ANJING RABIES DENGAN VAKSINASI

Dede Roberta, Mariatul Kiftiah, Woro Budiartini Partiwi

INTISARI

Penyakit rabies merupakan suatu penyakit yang disebabkan oleh virus Lyssavirus yang bersifat menular dan dapat menyerang ke semua spesies mamalia. Dinamika populasi anjing rabies dalam selang waktu t dapat diformulasikan dalam bentuk model matematika. Model matematika pada populasi anjing rabies dengan vaksinasi berdasarkan asumsi dan parameter yang mempengaruhinya. Model matematika nonlinear dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi yang digunakan terdiri dari sub-populasi anjing rentan (S), anjing terinfeksi rabies (R) dan anjing yang telah divaksinasi (V). Formulasi model matematika yang telah dibentuk selanjutnya dianalisis untuk mengetahui perilaku dari sistem dengan menggunakan simulasi nilai parameter. Analisis kestabilan dari sistem dalam penelitian ini adalah stabil asimtotik dan tidak stabil. Simulasi model matematika menunjukkan bahwa laju kelahiran alami dan persentase vaksinasi sangat mempengaruhi dinamika sub-populasi anjing yang terinfeksi rabies dalam suatu populasi.

Kata kunci : *model matematika, rabies, parameter, routh-hurwitz*

PENDAHULUAN

Rabies atau penyakit anjing gila merupakan suatu penyakit yang disebabkan oleh virus bersifat akut serta sangat berbahaya dan mengakibatkan kematian karena mampu menginfeksi sistem saraf pusat yaitu otak dan sumsum tulang belakang. Penyakit rabies disebabkan genus *Lyssavirus* dari famili *Rhabdoviridae*. Penularan rabies terjadi karena adanya gigitan hewan pembawa rabies (HPR) yang terinfeksi kepada hewan sehat ataupun manusia [1]. Virus rabies adalah virus zoonosis yang bersifat menular dan dapat menyerang ke semua spesies mamalia. Kelompok mamalia yang menjadi sumber rabies dan rentan terinfeksi virus ini adalah hewan anjing [2].

Berdasarkan data yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi, Kalimantan Barat mulai mengalami Kasus Luar Biasa (KLB) rabies pada akhir 2014 di beberapa Kabupaten yakni Sanggau, Sekadau, Bengkayang, Ketapang, Melawi, Sintang, Landak, dan Kapuas Hulu. Sejak tahun 2014-2016 sudah 29 orang meninggal dunia. Data yang diperoleh dari Dinas Peternakan dan Kesehatan Hewan Provinsi, terhitung sampai tanggal 13 Desember 2016 jumlah anjing di Kalimantan Barat mencapai 199.950 ekor dan yang sudah divaksin 47.007 ekor. Salah satu upaya pemerintah dalam menanggulangi kasus penyebaran virus rabies ini yakni dengan memberikan vaksin anti rabies (VAR) secara massal terhadap anjing liar maupun anjing rumahan. Vaksinasi diberikan dengan memberikan vaksin (bahan antigenik yang digunakan untuk menghasilkan kekebalan aktif terhadap suatu penyakit sehingga dapat mencegah atau mengurangi pengaruh infeksi oleh organisme) dalam tubuh makhluk hidup untuk memberikan kekebalan terhadap penyakit tersebut.

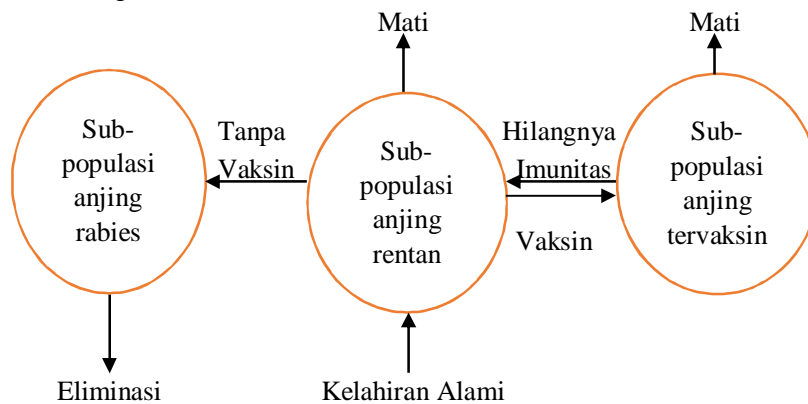
Terapan ilmu matematika yang dapat menganalisa dan mengendalikan perkembangan jumlah individu dalam suatu populasi adalah pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan salah satu sarana yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Masalah tersebut dimodelkan ke dalam bentuk matematis menggunakan asumsi-asumsi yang ada. Dari model akan dicari solusinya, baik dengan cara analisis maupun secara numerik [3]. Model matematika yang telah dibentuk dilakukan analisis, agar model yang dibentuk representatif terhadap permasalahan yang diteliti. Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk mengkaji dan mengembangkan model matematika dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi menggunakan data di Kalimantan Barat.

Dalam penelitian ini dibentuk model matematika dinamika populasi anjing rabies dengan tiga sub-populasi, yaitu sub-populasi anjing rentan (S), sub-populasi anjing terinfeksi rabies (R), dan sub-populasi anjing yang terinfeksi rabies (R). Penelitian ini bertujuan untuk menentukan titik kesetimbangan dan menganalisis tipe kestabilan dari model serta mendeskripsikan jumlah populasi anjing berdasarkan parameter yang ditentukan.

Penelitian ini dimulai dengan menentukan masalah nyata yang dibentuk model matematisnya dan serta mempelajari fakta-fakta penyakit rabies pada dunia nyata. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Dinas Peternakan dan Kesehatan Hewan Provinsi Kalimantan Barat. Selanjutnya membentuk asumsi untuk menyederhanakan model dan mendefinisikan parameter yang digunakan pada model. Tahap berikutnya membentuk diagram transfer dan model matematika dinamika populasi anjing rabies. Kemudian menentukan titik kesetimbangan dan melakukan linearisasi dengan membentuk matriks Jacobian. Setelah itu mencari nilai eigen dari persamaan karakteristik yang terbentuk dari matriks Jacobian. Tipe kestabilan model dianalisis dengan menggunakan kriteria kestabilan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh. Setelah menganalisis kestabilan model, berikutnya dilakukan simulasi numerik dengan nilai parameter yang ada untuk mendeskripsikan perilaku jumlah individu dalam populasi anjing. Kemudian interpretasikan terhadap dunia nyata.

MODEL DINAMIKA POPULASI ANJING RABIES DENGAN VAKSINASI

Model matematika dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi merupakan model yang mendeskripsikan dinamika jumlah individu dalam populasi anjing rabies dengan pengaruh vaksinasi. Pembentukan model dinamika populasi anjing rabies dimulai dengan mengasumsikan terdapat tiga sub-populasi anjing yaitu anjing yang rentan (S), anjing yang sudah terinfeksi rabies (R), anjing yang terinfeksi rabies (R). Penjelasan perkembangan populasi anjing rabies dengan adanya pemberian vaksin dideskripsikan dalam gambar berikut :



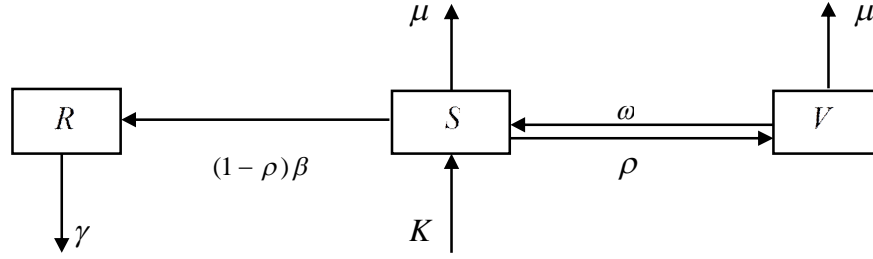
Gambar 1. Dinamika Populasi Anjing Rabies dengan Vaksinasi

Asumsi yang digunakan untuk membentuk model dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi yaitu sebagai berikut:

1. Virus rabies ditularkan melalui gigitan.
2. Rabies selalu fatal.
3. Populasi tertutup.
4. Laju kelahiran dan kematian konstan
5. Rabies pada anjing hanya dapat ditularkan oleh anjing yang sudah terinfeksi virus rabies.

Sebelum membentuk model matematika dinamika populasi anjing rabies, penulis terlebih dahulu mempelajari model matematika perkembangan populasi anjing rabies yang ditulis oleh Ahmad Fitri[4].

Model matematika dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi dari tiga sub-populasi direpresentasikan dalam diagram transfer berikut:



Gambar 2. Diagram Transfer Dinamika Rabies pada Populasi Anjing dengan Vaksinasi

Berdasarkan diagram transfer pada Gambar 2, diperoleh model dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= (1-\rho)\beta SR - \gamma R \\ \frac{dS}{dt} &= K + \omega V - (1-\rho)\beta SR - (\rho + \mu)S \\ \frac{dV}{dt} &= \rho S - (\omega + \mu)V \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dengan $K, \omega, \mu, \beta, \gamma > 0$, $S, V, R \geq 0$, dan $0 < \rho < 1$.

Keterangan parameter sebagai berikut:

K adalah kelahiran alami dari populasi anjing.

μ adalah laju kematian dari populasi anjing (konstan).

ρ adalah persentase pemberian vaksin pada anjing rentan.

β adalah laju penularan rabies dari anjing rentan menjadi anjing yang terinfeksi rabies.

γ adalah laju eliminasi terhadap populasi anjing yang terinfeksi rabies.

ω adalah laju individu yang kehilangan imunitas atau hilangnya kekebalan.

S adalah jumlah individu pada sub-populasi anjing rentan.

R adalah jumlah individu pada sub-populasi anjing terinfeksi rabies.

V adalah jumlah individu pada sub-populasi anjing tervaksin.

Titik kesetimbangan pada model dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi diperoleh

dengan membuat ruas kiri sistem Persamaan (1) sama dengan nol yaitu $\frac{dR}{dt} = 0$, $\frac{dS}{dt} = 0$, dan

$\frac{dV}{dt} = 0$. Sehingga diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu

$$TK_1 = (R_1, S_1, V_1) = \left(0, \frac{K(\omega + \mu)}{\mu(\omega + \rho + \mu)}, \frac{K\rho}{\mu(\omega + \rho + \mu)} \right) \text{ dan}$$

$$TK_2 = (R_2, S_2, V_2) = \left(\frac{K\beta\omega - K\beta\rho\omega + K\beta\mu - K\beta\rho\mu - \mu\omega\gamma - \mu\rho\gamma - \mu^2\gamma}{\gamma\beta(1-\rho)(\omega + \mu)}, \frac{\gamma}{\beta(1-\rho)}, \frac{\rho\gamma}{\beta(1-\rho)(\omega + \mu)} \right).$$

Titik kesetimbangan TK_1 mendeskripsikan kondisi saat suatu daerah tersebut tidak terdapat sub-populasi anjing yang terinfeksi rabies atau populasi anjing bebas rabies. Titik kesetimbangan TK_2 mendeskripsikan kondisi suatu daerah dengan sub-populasi anjing rabies tetap eksis. Titik kesetimbangan TK_2 pada sistem model matematika (1) menunjukkan jumlah anjing yang terinfeksi rabies (R), jumlah anjing yang rentan terinfeksi rabies (S), jumlah anjing yang tervaksin dengan parameter $K, \mu, \rho, \beta, \omega, \gamma > 0$ sehingga $R > 0$, $S > 0$, dan $V > 0$ maka titik TK_2 bernilai positif. Berdasarkan nilai TK_2 diperoleh

$$\frac{R_2}{S_2} = \frac{\frac{K\beta\omega - K\beta\rho\omega + K\beta\mu - K\beta\rho\mu - \mu\omega\gamma - \mu\rho\gamma - \mu^2\gamma}{\gamma\beta(1-\rho)(\omega + \mu)}}{\frac{\gamma}{\beta(1-\rho)}} > 0.$$

Sehingga diperoleh batas nilai K dan ρ sebagai berikut

$$K > \frac{\mu\omega\gamma + \mu\rho\gamma + \mu^2\gamma}{\beta\omega - \beta\rho\omega + \beta\mu - \beta\rho\mu} \text{ dan } \rho < \frac{K\beta\omega + K\beta\mu - \mu\gamma\omega - \mu^2\gamma}{K\beta\omega + K\beta\mu + \mu\gamma} \quad (2)$$

ANALISIS KESTABILAN MODEL DINAMIKA POPULASI ANJING

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial nonlinear dilakukan melalui linearisasi. Linearisasi dari suatu sistem dapat dicari menggunakan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$MJ = \begin{bmatrix} \frac{\partial \left(\frac{dR}{dt} \right)}{\partial R} & \frac{\partial \left(\frac{dR}{dt} \right)}{\partial S} & \frac{\partial \left(\frac{dR}{dt} \right)}{\partial V} \\ \frac{\partial \left(\frac{dS}{dt} \right)}{\partial R} & \frac{\partial \left(\frac{dS}{dt} \right)}{\partial S} & \frac{\partial \left(\frac{dS}{dt} \right)}{\partial V} \\ \frac{\partial \left(\frac{dV}{dt} \right)}{\partial R} & \frac{\partial \left(\frac{dV}{dt} \right)}{\partial S} & \frac{\partial \left(\frac{dV}{dt} \right)}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\rho)\beta S - \gamma & (1-\rho)\beta R & 0 \\ -(1-\rho)\beta S & -(1-\rho)\beta R - (\rho + \mu) & \omega \\ 0 & \rho & -(\omega + \mu) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Titik kesetimbangan $TK_1 = (R_1, S_1, V_1) = \left(0, \frac{K(\omega + \mu)}{\mu(\omega + \rho + \mu)}, \frac{K\rho}{\mu(\omega + \rho + \mu)} \right)$ disubstitusikan ke

Persamaan (3) sehingga diperoleh:

$$MJ_1 = \begin{bmatrix} \left(\frac{K\beta(1-\rho)(\omega + \mu)}{\mu(\omega + \rho + \mu)} \right) - \gamma & 0 & 0 \\ -\left(\frac{K\beta(1-\rho)(\omega + \mu)}{\mu(\omega + \rho + \mu)} \right) & -(\rho + \mu) & \omega \\ 0 & \rho & -(\omega + \mu) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Persamaan karakteristik dari Persamaan (4) adalah sebagai berikut:

$$\left(\lambda - \left(\frac{K\beta(1-\rho)(\omega + \mu)}{\mu(\omega + \rho + \mu)} \right) + \gamma \right) (\lambda + (\rho + \mu)) (\lambda + (\omega + \mu)) - \left(\lambda - \left(\frac{K\beta(1-\rho)(\omega + \mu)}{\mu(\omega + \rho + \mu)} \right) + \gamma \right) (-\omega)(-\rho) = 0.$$

Sehingga diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -\left(\frac{K\beta\mu\rho + K\beta\rho\omega - K\beta\mu - K\beta\omega + \gamma\mu^2 + \gamma\mu\rho + \gamma\mu\omega}{\mu(\omega + \rho + \mu)} \right)$,

dan $\lambda_3 = -(\omega + \rho + \mu)$. Parameter μ menyatakan laju kematian anjing sehingga $\mu > 0$ maka $\lambda_1 < 0$.

Parameter $K, \beta, \mu, \rho, \omega, \gamma > 0$ jika disubstitusikan ke $\frac{K\beta\mu\rho + K\beta\rho\omega - K\beta\mu - K\beta\omega + \gamma\mu^2 + \gamma\mu\rho + \gamma\mu\omega}{\mu(\omega + \rho + \mu)}$ maka $\lambda_2 < 0$. Nilai parameter $\mu, \rho, \omega > 0$, maka

$\lambda_3 < 0$. Hal ini menunjukkan sistem Persamaan (1) stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan TK_1 dengan batas parameter [3]

$$K < \frac{\mu\omega\gamma + \mu\rho\gamma + \mu^2\gamma}{\beta\omega - \beta\rho\omega + \beta\mu - \beta\rho\mu} \text{ dan } \rho > \frac{K\beta\omega + K\beta\mu - \mu\gamma\omega - \mu^2\gamma}{K\beta\omega + K\beta\mu + \mu\gamma}.$$

Selanjutnya untuk mengetahui kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan TK_2 dengan cara mensubstitusikan $TK_2 = (R_2, S_2, V_2)$ ke Persamaan (3) sehingga diperoleh:

$$MJ_2 = \begin{bmatrix} (1-\rho)\beta\left(\frac{\gamma}{\beta(1-\rho)}\right) - \gamma & (1-\rho)\beta\left(\frac{P}{\beta(1-\rho)Q}\right) & 0 \\ -(1-\rho)\beta\left(\frac{\gamma}{\beta(1-\rho)}\right) & -(1-\rho)\beta\left(\frac{P}{\beta(1-\rho)Q}\right) - (\rho + \mu) & \omega \\ 0 & \rho & -(\omega + \mu) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Persamaan karakteristik dari Persamaan (5) dengan $P = K\beta\omega - K\beta\rho\omega + K\beta\mu - K\beta\rho\mu - \mu\omega\gamma - \mu\rho\gamma - \mu^2\gamma$ dan $Q = (\omega + \mu)\gamma$ adalah sebagai berikut:

$$\lambda^3 + \lambda^3\left(\frac{P}{Q} + \rho + 2\mu + \omega\right) + \lambda\left(\omega\frac{P}{Q} + \mu\omega + \mu\frac{P}{Q} + \rho\mu + \mu^2 + \gamma\frac{P}{Q}\right) + \gamma\omega\frac{P}{Q} + \gamma\mu\frac{P}{Q} = 0 \quad (6)$$

atau $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ dengan $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{P}{Q} + \rho + 2\mu + \omega$, $a_2 = \omega\frac{P}{Q} + \mu\omega + \mu\frac{P}{Q} + \rho\mu + \mu^2 + \gamma\frac{P}{Q}$, $a_3 = \gamma\omega\frac{P}{Q} + \gamma\mu\frac{P}{Q}$. Sifat stabilitas suatu sistem di sekitar titik kesetimbangan dapat diketahui berdasarkan tanda dari nilai eigen. Untuk menyelidiki tanda dari nilai eigen tersebut dapat menggunakan Kriteria Routh Hurwitz [5].

$$H_1 = a_1 = \frac{P}{Q} + \rho + 2\mu + \omega > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{P}{Q} + \rho + 2\mu + \omega & \gamma\omega\frac{P}{Q} + \gamma\mu\frac{P}{Q} \\ 1 & \omega\frac{P}{Q} + \mu\omega + \mu\frac{P}{Q} + \rho\mu + \mu^2 + \gamma\frac{P}{Q} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{P}{Q} + \rho + 2\mu + \omega\right)\left(\omega\frac{P}{Q} + \mu\omega + \mu\frac{P}{Q} + \rho\mu + \mu^2 + \gamma\frac{P}{Q}\right) - \left(\gamma\omega\frac{P}{Q} + \gamma\mu\frac{P}{Q}\right) > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 + a_3a_4(0) + a_5a_0a_1 - (0)a_2a_5 - a_1a_4a_1 - a_3a_0a_3 > 0$$

Berdasarkan Kriteria Routh-Hurwitz, jika $H_1 > 0$, $H_2 > 0$, dan $H_3 > 0$ maka semua akar-akar dari persamaan karakteristik (6) pada TK_2 adalah negatif atau mempunyai bagian real negatif [5]. Dengan kata lain, $\lambda_{1,2,3} < 0$. Hal ini menunjukkan sistem Persamaan (1) stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan TK_2 dengan batas kelahiran alami dan batas vaksinasi sebesar

$$K > \frac{\mu\omega\gamma + \mu\rho\gamma + \mu^2\gamma}{\beta\omega - \beta\rho\omega + \beta\mu - \beta\rho\mu} \text{ dan } \rho < \frac{K\beta\omega + K\beta\mu - \mu\gamma\omega - \mu^2\gamma}{K\beta\omega + K\beta\mu + \mu\gamma}.$$

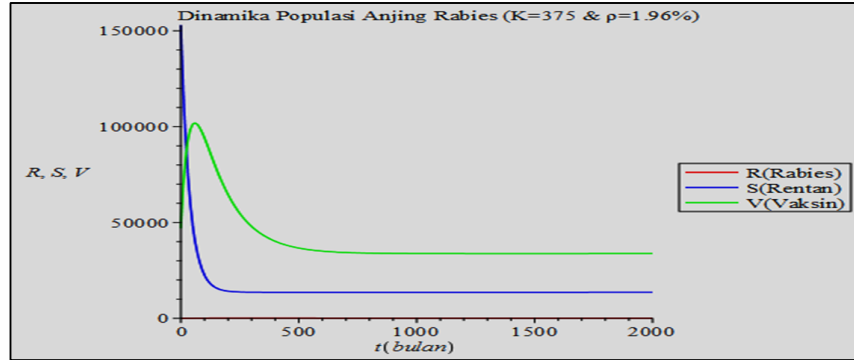
INTERPRETASI DAN SIMULASI MODEL

Interpretasi dan simulasi model dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi dapat dilakukan dengan memberikan nilai pada parameter.

a. Simulasi model dengan $\rho = 1,96\%$, $\mu = 0,0079$, $\omega = 0,0000035$, $\beta = 0,00000055$, $\gamma = 0,0076$

i) $K = 375$ ekor per bulan

Diperoleh $TK_1 = (R_1, S_1, V_1) = (0, 13.640, 33.827)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0,0275035$, $\lambda_2 = -0,0079$, dan $\lambda_3 = -0,0002446784747$. Ketiga nilai eigennya merupakan bilangan real negatif maka sistem (1) stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan TK_1 . Selanjutnya $TK_2 = (R_2, S_2, V_2) = (-1.641, 14.094, 34.952)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = 0,00025045763 + 1,7 \times 10^{-11}i$ dan $\lambda_{2,3} = -0,01738444366 - 9 \times 10^{-12}i + (\pm 0,005475849575 \pm 9 \times 10^{-12}i)\sqrt{3}$. Karena salah satu nilai eigen bernilai positif maka sistem (1) tidak stabil di sekitar titik kesetimbangan TK_2 [6]. Ketika dipilih nilai $K < 390$, sistem (1) akan stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan TK_1 . Deskripsi kestabilan model dinamika populasi anjing rabies dapat ditunjukkan pada Gambar 3 berikut:

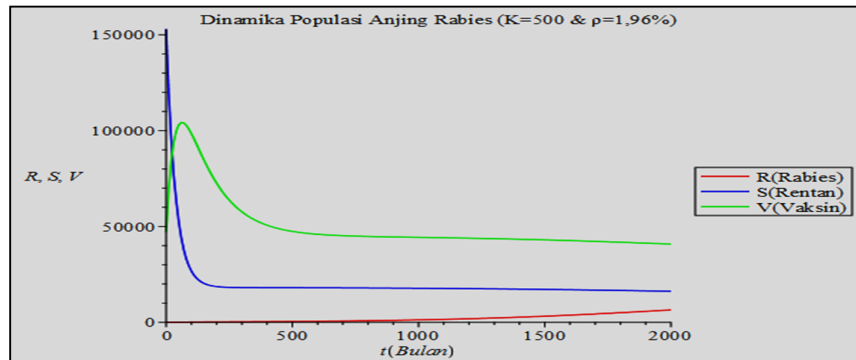


Gambar 3. Plot kestabilan model dinamika populasi anjing rabies dengan $K = 375$

Pada Gambar 3 terlihat bahwa grafik sub-populasi anjing rabies yang ditandai dengan garis berwarna merah hampir tidak terlihat karena berada segaris dengan absis t yang menyatakan waktu. Hal ini menunjukkan kondisi populasi anjing rabies akan turun bahkan mendekati kepunahan dan konstan hingga $t \rightarrow \infty$.

ii) $K = 500$ ekor per bulan

Diperoleh $TK_1 = (R_1, S_1, V_1) = (0, 18.187, 45.103)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0,027503$, $\lambda_2 = -0,0079$, dan $\lambda_3 = 0,002207095369$. Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh menunjukkan sistem (1) tidak stabil di sekitar titik kesetimbangan TK_1 karena mempunyai salah satu nilai eigen yang bernilai positif. Selanjutnya $TK_2 = (R_2, S_2, V_2) = (14.805, 14.094, 34.952)$ dengan nilai eigen $\lambda_{1,2} = -0,02079256099 - 7 \times 10^{-12}i + (\pm 0,007443492780 \pm 8 \times 10^{-12}i)\sqrt{3}$ dan $\lambda_3 = -0,00180205771 + 1,4 \times 10^{-11}i$. Diperoleh nilai eigen berupa bilangan imajiner kompleks yang berarti sistem (1) stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan TK_2 [6]. Ketika dipilih nilai $K > 390$, sistem (1) akan stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan TK_2 . Hasil simulasi data dapat ditunjukkan pada Gambar 4 berikut:



Gambar 4. Plot kestabilan model dinamika populasi anjing rabies dengan $K = 500$

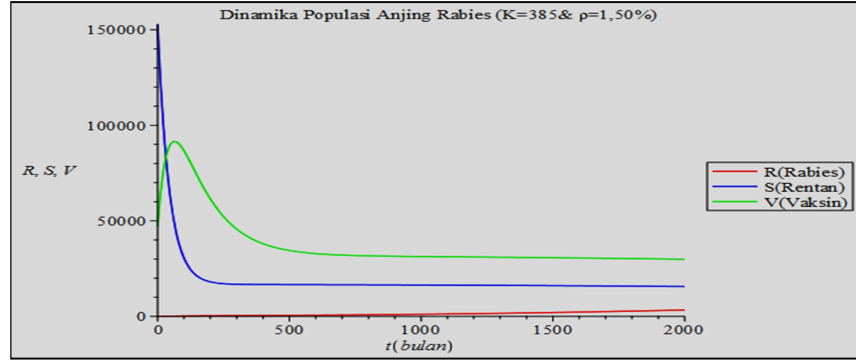
Pada Gambar 4 terlihat bahwa grafik sub-populasi anjing rabies yang ditandai dengan garis berwarna merah bergerak naik dari waktu ke waktu. Hal ini menunjukkan kondisi populasi anjing rabies masih ada dan konstan hingga $t \rightarrow \infty$.

b. Simulasi model dengan $K = 385$, $\mu = 0,0079$, $\omega = 0,0000035$, $\beta = 0,00000055$, $\gamma = 0,0076$

i) $\rho = 1,50\%$ per bulan

Diperoleh $TK_1 = (R_1, S_1, V_1) = (0, 16.817, 31.917)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0,0229035$, $\lambda_2 = -0,0079$, dan $\lambda_3 = 0,001510666757$. Berdasarkan nilai eigen, sistem (1) tidak stabil di sekitar titik kesetimbangan TK_1 karena mempunyai salah satu nilai eigen yang bernilai positif. Selanjutnya $TK_2 = (R_2, S_2, V_2) = (8.399, 14.028, 26.624)$ dengan nilai eigen $\lambda_{1,2} = -0,01701496328 - 1,2 \times 10^{-11}i + (\pm 0,005262503475 \pm 1,15 \times 10^{-11}i)\sqrt{3}$ dan $\lambda_3 =$

$-0,00132413054 + 2,5 \times 10^{-11}i$. Ketiga nilai eigen bernilai negatif menunjukkan bahwa sistem (1) stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan TK_2 [6]. Ketika memilih $\rho < 1,92\%$ maka sistem (1) akan stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan TK_2 . Hasil simulasi data dapat dilihat pada Gambar 5 berikut:

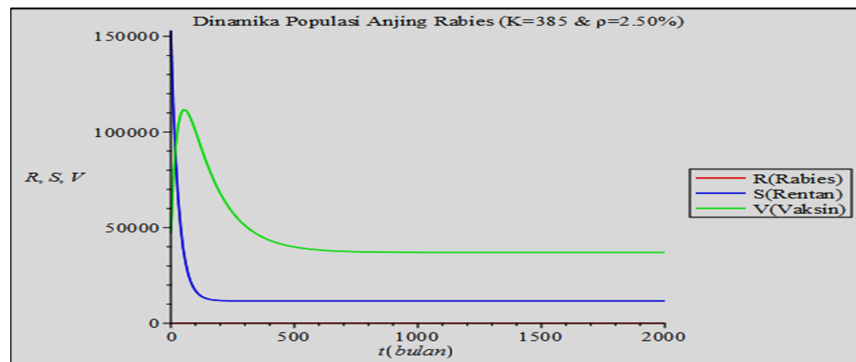


Gambar 5. Plot kestabilan model dinamika populasi anjing rabies dengan $\rho < 1,92\%$

Gambar 5 menunjukkan bahwa grafik sub-populasi anjing rabies yang ditandai dengan garis berwarna merah bergerak naik dari waktu ke waktu. Hal ini menunjukkan kondisi populasi anjing rabies masih ada dan konstan hingga $t \rightarrow \infty$.

ii) $\rho = 2,50\%$ per bulan

Diperoleh $TK_1 = (R_1, S_1, V_1) = (0, 11.706, 37.028)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0,0329035$, $\lambda_2 = -0,001322621667$, dan $\lambda_3 = -0,0079$. Ketiga nilai eigen yang diperoleh bernilai negatif menunjukkan bahwa sistem (1) stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan TK_1 . Selanjutnya $TK_2 = (R_2, S_2, V_2) = (-10.673, 14.172, 44.829)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = 0,00151653191 + 8 \times 10^{-12}i$ dan $\lambda_{2,3} = -0,01829819950 - 4 \times 10^{-12}i + (\pm 0,006003421 \pm 5 \times 10^{-12}i)\sqrt{3}$. Pada TK_2 mempunyai salah satu nilai eigen yang bernilai positif maka sistem Persamaan (1) tidak stabil di sekitar titik kesetimbangan TK_2 [6]. Ketika memilih $\rho > 1,92\%$ maka sistem (1) akan stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan TK_1 . Hasil simulasi data dapat dilihat pada Gambar 6 berikut:



Gambar 6. Plot kestabilan model dinamika populasi anjing rabies dengan $\rho > 1,92\%$

Pada Gambar 6 terlihat bahwa grafik sub-populasi anjing rabies yang ditandai dengan garis berwarna merah hampir tidak terlihat karena berada segaris dengan absis t yang menyatakan waktu. Hal ini menunjukkan kondisi populasi anjing rabies akan turun bahkan mendekati kepunahan dan konstan hingga $t \rightarrow \infty$.

PENUTUP

Diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= (1 - \rho)\beta SR - \gamma R \\ \frac{dS}{dt} &= K + \omega V - (1 - \rho)\beta SR - (\rho + \mu)S \\ \frac{dV}{dt} &= \rho S - (\omega + \mu)V\end{aligned}$$

2. Titik kesetimbangan dari model matematika dinamika populasi anjing rabies dengan vaksinasi yaitu

$$\begin{aligned}TK_1 &= (R_1, S_1, V_1) = \left(0, \frac{K(\omega + \mu)}{\mu(\omega + \rho + \mu)}, \frac{K\rho}{\mu(\omega + \rho + \mu)}\right) \text{ dan} \\ TK_2 &= (R_2, S_2, V_2) = \left(\frac{K\beta\omega - K\beta\rho\omega + K\beta\mu - K\beta\rho\mu - \mu\omega\gamma - \mu\rho\gamma - \mu^2\gamma}{\gamma\beta(1 - \rho)(\omega + \mu)}, \frac{\gamma}{\beta(1 - \rho)}, \frac{\rho\gamma}{\beta(1 - \rho)(\omega + \mu)}\right)\end{aligned}$$

3. Analisis kestabilan di TK_1 stabil asimtotik di sekitar sistem (1) dengan kondisi bebas anjing rabies maka batas nilai parameter kelahiran dan persentase vaksinasi yaitu $K < \frac{\mu\omega\gamma + \mu\rho\gamma + \mu^2\gamma}{\beta\omega - \beta\rho\omega + \beta\mu - \beta\rho\mu}$

dan $\rho > \frac{K\beta\omega + K\beta\mu - \mu\gamma\omega - \mu^2\gamma}{K\beta\omega + K\beta\mu + \mu\gamma}$. Dengan kata lain, $K < 390$ per bulan dan $\rho > 1,96\%$ per bulan.

4. Analisis kestabilan di TK_2 stabil asimtotik di sekitar sistem (1) dengan kondisi anjing rabies masih eksis maka batas nilai parameter kelahiran dan vaksinasi yaitu $K > \frac{\mu\omega\gamma + \mu\rho\gamma + \mu^2\gamma}{\beta\omega - \beta\rho\omega + \beta\mu - \beta\rho\mu}$ dan

$\rho < \frac{K\beta\omega + K\beta\mu - \mu\gamma\omega - \mu^2\gamma}{K\beta\omega + K\beta\mu + \mu\gamma}$. Dengan kata lain, $K > 390$ per bulan dalam penelitian ini penulis ambil $K = 385$ per bulan konstan sehingga diperoleh batas $\rho < 1,92\%$ per bulan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Asamoah, J.K.K., Oduro, Bonyah, Seidu, B., Modelling of Rabies Transmission Dynamics Using Optimal Control Analysis. *Jurnal of Applied Mathematic, Hindawi*; 2017.
- [2] Kementerian Kesehatan RI, *Buku Saku Pengendalian Rabies di Indonesia*, Jakarta: Bakti Husada; 2014.
- [3] Rumlawang, F.Y., Nanlohy, M.I., Analisa Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Rabies. *Jurnal Barekeng*. 2011;5(2):39-44.
- [4] Fitri, A., Oka, T.B., Widana, I.N., Model Matematika (Nonlinier) Populasi Anjing Rabies dengan Vaksinasi. *Jurnal Matematika*. 2015 Juni;5(1):14-29.
- [5] Murray, J.D., *Mathematical Biology: An Introduction*, Third Edition. New York/Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag; 2002.
- [6] Boyce, W.E. and DiPrima, R.C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. United States of America: John Wiley and Sons, Inc.; 2009.

DEDE ROBERTA : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
edithamymom@gmail.com

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

WORO BUDIARTINI PARTIWI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
woro.partiwi@gmail.com